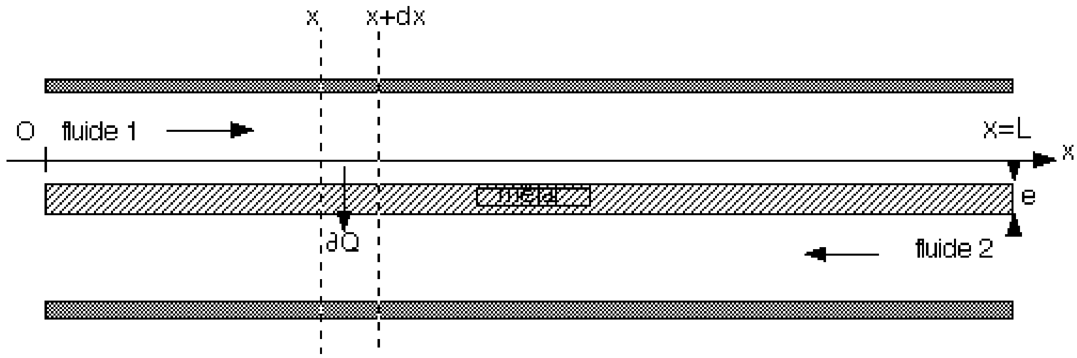
Etude d'un échangeur thermique.

Un fluide chaud et un fluide froid s'écoulent à contre-courant de part et d'autre d'une plaque conductrice métallique de conductivité thermique λ, d'épaisseur e de l'ordre du millimètre, de largeur ℓ perpendiculairement à la figure et de longueur L de l'ordre du mètre dans le sens de l'écoulement. On se place en régime permanent, la température du fluide chaud en fonction de son abscisse est $T_1(x)$ et celle du fluide froid $T_2(x)$. Pour alléger les calculs, on suppose qu'il s'agit du même fluide (de l'eau) de chaleur massique c s'écoulant avec le même débit massique D_m.



Question 1 :
Justifier qu'on peut négliger les transferts thermiques au sein de l'eau et donc que seuls interviennent ceux au sein du métal.

Les densités de flux thermique sont en $-\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$. Si l'on compare la densité de flux thermique dans le sens de l'écoulement à celle à travers le métal, elle est beaucoup plus faible car l'eau est beaucoup moins conductrice que le métal (mille fois moins en gros) et que les gradients selon Ox sont plus faibles que selon Oz car on passe du chaud au froid sur des distances de l'ordre respectivement L et e, là encore avec un facteur mille.

Question 2 :
On suppose en outre que la température reste continue à l'interface métal-eau. Calculer la puissance thermique traversant la plaque métallique entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

Le flux thermique $\mathcal{P}$ traverse une surface $S = \ell\,\mathrm{d}x$ et parcourt une longueur e entre deux surfaces dont les températures sont respectivement T_1 en haut et T_2 en bas. On introduit la résistance thermique $R = \frac{e}{\lambda S}$ pour affirmer en analogie avec la loi d'Ohm $T_1 - T_2 = R\,\mathcal{P}$ d'où

$$\mathcal{P} = \frac{\lambda\,\ell\,\mathrm{d}x}{e}\,(T_1 - T_2)$$

ou, plus correctement, puisqu'il s'agit d'un flux thermique élémentaire,

$$\mathrm{d}\mathcal{P} = \frac{\lambda\,\ell}{e}\,(T_1 - T_2)\,\mathrm{d}x$$

compté positivement du haut vers le bas, soit du chaud vers le froid.

Question 3 :
Effectuer un bilan énergétique pour le fluide chaud dans un volume de contrôle compris entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$. En déduire une équation différentielle liant $\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}$ à $T_1(x)-T_2(x)$

Notons U^* l'énergie interne du volume de contrôle ; elle est constante car on est en régime permanent. Utilisons pour raisonner la méthode prônée par le programme et qui repose sur du béton. Définissons, à l'instant t, le système comme réunion du volume de contrôle et de la masse $\delta_e m = D_m\,\mathrm{d}t$ qui va y entrer, par la face d'abscisse x, entre t et $t+\mathrm{d}t$, en choisissant $\mathrm{d}t$ suffisamment petit pour que $\delta_e m$ corresponde à une tranche d'épaisseur petite devant $\mathrm{d}x$ de sorte que sa température puisse être considérée comme uniforme et égale à $T_1(x)$. L'énergie interne $U(t)$ du système à l'instant t est somme de celle du volume de contrôle (U^*) et celle de $\delta_e m$, soit dans le modèle de la phase condensée $\delta_e m\, c\, T_1(x)$, donc

$$U(t) = U^* + D_m\, c\, T_1(x)\, \mathrm{d}t$$

A l'instant $t + \mathrm{d}t$, par construction, $\delta_e m$ est à l'intérieur du volume de contrôle mais il en est sorti par la face d'abscisse $x + \mathrm{d}x$ une masse $\delta_s m$ à la température $T_1(x + \mathrm{d}x)$. La conservation de la masse entraîne que $\delta_s m = \delta_e m$. On aura donc

$$U(t + \mathrm{d}t) = U^* + D_m\, c\, T_1(x + \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t$$

On en déduit la variation d'énergie interne du système :

$$\mathrm{d}U = U(t + \mathrm{d}t) - U(t) = D_m\, c\, (T_1(x + \mathrm{d}x) - T_1(x))\, \mathrm{d}t = D_m\, c\, \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le premier principe de la thermodynamique. Le travail échangé est nul car l'eau est incompressible et la chaleur échangée pendant la durée $\mathrm{d}t$ est $-\mathrm{d}\mathcal{P}\, \mathrm{d}t$, avec un signe moins compte tenu de la convention de signe choisie plus haut. On a donc

$$\mathrm{d}U = D_m\, c\, \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \delta W + \delta Q = 0 - \mathrm{d}\mathcal{P}\, \mathrm{d}t = -\frac{\lambda\, \ell}{e}\, (T_1 - T_2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

soit, après les simplifications qui s'imposent :

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda\, \ell}{D_m\, c\, e}\, (T_2 - T_1) \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 4 :

Quelle équation donnerait un bilan énergétique pour le fluide froid ? En déduire que la différence $\delta T = T_1(x) - T_2(x)$ est constante et donner son expression en fonction de $\Delta T = T_1(0) - T_2(L)$, différence des températures d'entrée, et des constantes du problèmes.

Par rapport à ce qui précède, il faut changer le signe de l'échange thermique et permuter x et $x + \mathrm{d}x$ (on est à contre-courant) ; ces deux changements de signe s'annulent et donc

$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda\, \ell}{D_m\, c\, e}\, (T_2 - T_1) \qquad \text{(équation 2)}$$

On soustrait l'équation 2 de l'équation 1

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} = 0$$

d'où, par intégration, $\delta T = T_1 - T_2$ est constant, mais à ce stade, *on n'en connaît pas* la valeur. Reportons dans l'équation 1 et intégrons la entre $x = 0$ et $x = L$

$$\mathrm{d}T_1 = -\frac{\lambda\, \ell}{D_m\, c\, e}\, \delta T\, \mathrm{d}x$$

$$T_1(L) - T_1(0) = -\frac{\lambda\, \ell}{D_m\, c\, e}\, \delta T\, L$$

où $T_1(0)$, température d'entrée de l'eau chaude est une donnée du problème, mais pas $T_1(L)$; on relie cette température à $T_2(L)$, température d'entrée de l'eau froide, elle aussi donnée, par $T_1(L) - T_2(L) = \delta T$, d'où, en notant $\Delta T = T_1(0) - T_2(L)$,

$$T_2(L) + \delta T - T_1(0) = \delta T - \Delta T = -\frac{\lambda\, \ell}{D_m\, c\, e}\, \delta T\, L$$

soit, en posant $a = \frac{D_m\, c\, e}{\lambda\, \ell}$,

$$\delta T \left(1 + \frac{L}{a}\right) = \Delta T$$

Question 5 :

Donner une expression simplifiée de $\delta T/\Delta T$ lorsque ce rapport est petit (et à quelle condition l'est-il ?). Pourquoi l'échangeur fonctionne-t-il à contre-courant ?

Si L est grand devant a, sinon l'échangeur n'aurait guère d'intérêt, on a $\delta T = \frac{a}{L}\, \Delta T$

Comme l'eau initialement chaude ressort à $T_1(L) = T_2(L) + \delta T$, on peut rendre $T_1(L)$ aussi proche que l'on veut de $T_2(L)$ en allongeant suffisamment l'échangeur.

Bien évidemment si les deux fluides allaient dans le même sens ils sortiraient, dans un échangeur suffisamment long, à la même température et à débit égal, ce serait la température moyenne $\dfrac{T_1(0) + T_2(0)}{2}$, ce serait une bien médiocre performance.

Bien sûr, on a toujours cela en tête en TP de chimie pour faire circuler le réfrigérant dans le bon sens.